

Loi d'action-réaction, collisions

Au chapitre 2, on a énoncé les deux premières lois de Newton qui déterminent la dynamique d'un point matériel. Dans la première section de ce chapitre, on va énoncer la 3^e loi de Newton qui détermine l'interaction dynamique entre des points matériels au sein d'un système. Dans la deuxième et la troisième partie de cette section, on abordera l'étude des collisions entre des points matériels au sein d'un système de points matériels.

8.1 Loi d'action-réaction

La **3^e loi de Newton** appelée aussi **loi d'action-réaction** décrit l'interaction entre deux ou plusieurs points matériels. Un ensemble de deux ou plusieurs points matériels en interaction est appelé un **système** de points matériels. Dans le cas d'un système de points matériels, il faut distinguer les **forces extérieures** $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$ exercées sur les points matériels P_α par l'extérieur des **forces intérieures** $\mathbf{F}_\alpha^{\text{int}}$ exercées sur les points matériels P_α par les autres points matériels du système. Les deux premières lois de Newton sont définies en termes de forces extérieures exercées sur un point matériel. Ces lois restent valables pour un système de points matériels.

8.1.1 3^e loi de Newton

La **3^e loi de Newton** est énoncée par Newton dans ses *Principia Mathematica* de la manière suivante :

L'action est toujours égale à la réaction ; c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraire.

En termes plus modernes, on dirait simplement :

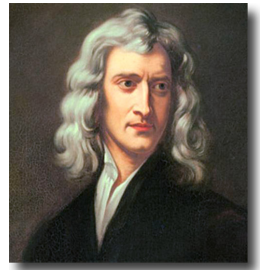
Un point matériel 1 qui exerce une force $\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2}$ sur un point matériel 2 subit une force de réaction $\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1}$ d'intensité égale, de même direction et de sens opposé, exercée par le point matériel 2.

La 3^e loi de Newton s'écrit donc simplement comme,

$$\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} + \mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} = \mathbf{0} \quad (8.1)$$

8.1.2 Forces intérieures et extérieures

Pour illustrer la différence entre des forces intérieures et extérieures, on considère un système constitué de deux points matériels de masses égales reliées entre elles par un fil de masse négligeable passant par deux poulies. Si les masses sont égales, le système est à l'équilibre. On peut virtuellement décomposer le système en deux. Evidemment, la force $\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1}$ exercée par le point matériel 2 sur le fil sera égale et opposée à la force $\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2}$ exercée



Isaac Newton

par la masse 1 sur le fil en vertu de la 3^e loi de Newton. Ainsi, la résultante des forces d'action et de réaction est nulle (Fig. 8.1).

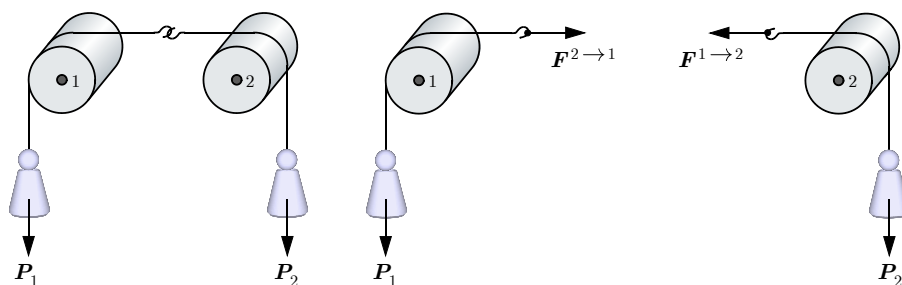


FIGURE 8.1 Les forces $\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2}$ et $\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1}$ sont intérieures au système alors que les poids \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 sont des forces extérieures.

Les notions de forces intérieures et extérieures dépendent du choix de système de points matériels. Pour le système formé des deux points matériels, les forces d'interaction $\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2}$ et $\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1}$ sont des forces intérieures. Pour chaque sous-système formé d'un seul point matériel, les forces d'interaction $\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2}$ et $\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1}$ sont des forces extérieures. En revanche, comme les poids des points matériels \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 sont dus à l'interaction gravitationnelle de la terre, ce sont des forces extérieures pour le système et les deux sous-systèmes.

Dans le cas général, le poids n'est pas toujours une force extérieure. Par exemple, si le système est la terre et un avion, alors le poids de l'avion est une force intérieure au système. Si le système est l'avion sans la terre, le poids est une force extérieure. Comme autre exemple de force intérieure, on peut mentionner les forces de cohésion exercées entre les atomes au sein d'un solide.

Pour illustrer la différence entre des forces extérieures et intérieures, on prend un chariot contenant un cylindre rempli d'eau pouvant rouler sur un rail horizontal : l'eau s'écoule du bas du réservoir avec une quantité de mouvement horizontale à la sortie en raison de la pression de la colonne d'eau (Fig. 8.1). Dans un premier cas, le chariot n'est pas attaché à un wagon récepteur. Dans ce cas, en absence de wagon récepteur, la force exercée par l'eau qui s'écoule du chariot est une force extérieure qui provoque le déplacement du chariot dans la direction opposée à l'écoulement. Dans un deuxième cas, le chariot est attaché à un wagon récepteur. Dans ce cas, la force exercée par l'eau qui s'écoule du chariot dans le wagon récepteur est une force d'interaction intérieure au système formé du chariot et du wagon. D'après la loi d'action-réaction, elle est égale et opposée à la force exercée par l'eau sur le wagon récepteur. Par conséquent le système est immobile.

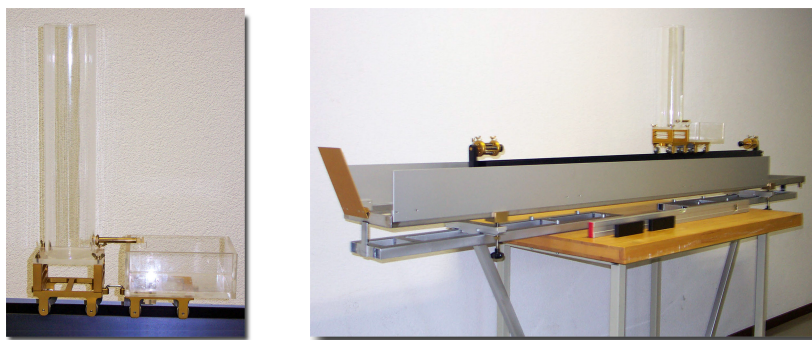


FIGURE 8.2 Le chariot se déplace dans le sens opposé à l'écoulement de l'eau en absence de wagon. Si l'eau s'écoule dans un wagon récepteur accroché au chariot, l'ensemble reste immobile.

8.1.3 Conservation de la quantité de mouvement

Un système de points matériels est *isolé* s'il n'y a pas d'interaction avec l'extérieur. En mécanique, il n'y a pas de force extérieure agissant sur un système isolé. On considère un

système constitué de deux points matériels 1 et 2 en interaction. Soit \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 les quantités de mouvement de ces points matériels et $\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2}$ et $\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1}$ les forces d'interaction exercées par un point matériel sur l'autre. La loi du mouvement (2.32) appliquée séparément à chaque sous-système formé d'un point matériel s'écrit,

$$\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} = \dot{\mathbf{p}}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} = \dot{\mathbf{p}}_2 \quad (8.2)$$

Compte tenu des lois du mouvement (8.2) et de la 3^e loi de Newton (8.1), la variation de la quantité mouvement totale du système $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ s'écrit,

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} + \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} = \mathbf{0} \quad (8.3)$$

Par conséquent, pour un système isolé ou un système pour lequel la force résultante est nulle, la quantité de mouvement totale est conservée,

$$\mathbf{p} = \text{cste} \quad (\text{système isolé}) \quad (8.4)$$

Cette loi de conservation joue un rôle très important en physique et en particulier dans l'étude des collisions.

A titre d'exemple, on peut mentionner le mouvement d'un étudiant sur un chariot. Lorsque l'étudiant monte sur le chariot, le poids \mathbf{P} du système formé de l'étudiant et du chariot est compensé par la force de réaction normale \mathbf{N} exercée par le sol,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{p} = \text{cste} \quad (8.5)$$

Par conséquent, la quantité de mouvement totale \mathbf{p} du système est conservée. L'étudiant et le chariot sont initialement immobiles par rapport au référentiel d'inertie de l'auditoire, c'est-à-dire que la quantité de mouvement totale du système constitué de l'étudiant et du chariot est nulle en tout temps,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 \quad (8.6)$$

Ainsi, l'étudiant se déplace avec une quantité de mouvement \mathbf{p}_1 vers la droite, le chariot se déplace avec une quantité de mouvement opposée $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ vers la gauche et vice versa afin que la quantité de mouvement totale du système reste nulle en vertu du principe de conservation de la quantité de mouvement totale (Fig. 8.3).



FIGURE 8.3 Par conservation de la quantité de mouvement totale, lorsqu'un étudiant se déplace sur le chariot ce dernier se déplace dans le sens contraire.

8.1.4 Chariot propulsé par un boulet

Un chariot de masse M contenant des rails fixés sur une rampe peut se déplacer horizontalement sur le sol. Un boulet de masse m est déposé initialement au haut de la rampe sur le côté gauche du chariot (Fig. 8.4). Le chariot et le boulet sont considérés comme des points matériels. Comme le mouvement du chariot est horizontal et que le mouvement du boulet a lieu le long de la rampe dans le plan vertical, on décrit la dynamique du chariot et du boulet dans le référentiel du sol à l'aide du repère cartésien (\hat{x}, \hat{y}) en choisissant trois systèmes différents : premièrement le chariot et le boulet, deuxièmement le boulet et troisièmement le chariot.



Chariot et boulet

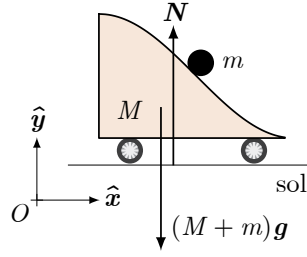


FIGURE 8.4 Le système formé du chariot de masse M et du boulet de masse m est soumis à son poids $\mathbf{P} = (M + m)\mathbf{g}$ et à la force de réaction normale du sol \mathbf{N} .

Premièrement, on choisit comme système le chariot et le boulet (Fig. 8.4). Ce système est soumis à deux forces extérieures, son poids et la force de réaction normale du sol,

$$\mathbf{P} = (M + m)\mathbf{g} = - (M + m)g\hat{\mathbf{y}} \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = N\hat{\mathbf{y}} \quad (\text{chariot et boulet}) \quad (8.7)$$

La quantité de mouvement totale du système est,

$$\mathbf{p} = p_x\hat{\mathbf{x}} + p_y\hat{\mathbf{y}} \quad (\text{chariot et boulet}) \quad (8.8)$$

La loi vectorielle du mouvement (2.17) s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} = \dot{\mathbf{p}} \quad (\text{chariot et boulet}) \quad (8.9)$$

En projetant la loi vectorielle du mouvement (8.9) selon les lignes de coordonnées cartésiennes de vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$ respectivement, compte tenu des forces extérieures (8.7) et de la quantité de mouvement (8.8), on obtient les deux équations scalaires suivantes,

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{\mathbf{x}} : \quad 0 &= \dot{p}_x \\ \text{selon } \hat{\mathbf{y}} : \quad - (M + m)g + N &= \dot{p}_y \end{aligned} \quad (8.10)$$

On conclut que la composante horizontale de la quantité de mouvement totale p_x , qui est initialement nulle, reste nulle durant tout le mouvement puisque les deux forces extérieures n'ont pas de composante horizontale. De plus, la composante horizontale de la quantité de mouvement totale p_x est la somme des composantes horizontales des quantités de mouvement du chariot MV_x et du boulet mv_x ,

$$p_x = \text{cste} = 0 \quad \text{ainsi} \quad p_x = MV_x + mv_x = 0 \quad (\text{chariot et boulet}) \quad (8.11)$$

Etant donné que le chariot descend le long des rails sur la rampe inclinée vers la droite avec une vitesse de composante horizontale $v_x > 0$, on en conclut que la composante horizontale de la vitesse V_x du chariot est de signe opposé, c'est-à-dire qu'il se déplace vers la gauche,

$$V_x = -\frac{m}{M}v_x < 0 \quad (8.12)$$

La projection de la loi du mouvement (8.10) selon la ligne de coordonnée verticale montre que la composante verticale de la quantité de mouvement p_y n'est pas constante car la composante verticale de la somme des forces extérieures est non-nulle.

Deuxièmement, on choisit comme système le boulet (Fig. 8.5). Le boulet est soumis à deux forces extérieures, son poids $\mathbf{P}_m = m\mathbf{g}$ et la force de réaction normale du chariot \mathbf{N}' . La loi vectorielle du mouvement (2.17) s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P}_m + \mathbf{N}' = m\mathbf{a}_m \quad (\text{boulet}) \quad (8.13)$$

où l'accélération \mathbf{a}_m du boulet est tangente à la surface du chariot puisque le boulet se déplace le long des rails. la force de réaction normale \mathbf{N}' exercée par le chariot est une force extérieure au sous-système du boulet mais une force intérieure au système formé du chariot et du boulet.

Troisièmement, on choisit comme système le chariot (Fig. 8.5). Le chariot est soumis à trois forces extérieures, son poids $\mathbf{P}_M = M\mathbf{g}$, la force de réaction normale du sol \mathbf{N} et la

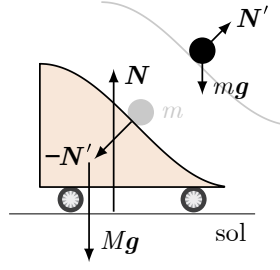


FIGURE 8.5 Le boulet de masse m est soumis à son poids $\mathbf{P}_m = m\mathbf{g}$ et à la force de réaction normale du chariot \mathbf{N}' . Le chariot de masse M est soumis à son poids $\mathbf{P}_M = M\mathbf{g}$ et aux forces de réaction normale du sol \mathbf{N} et du boulet $-\mathbf{N}'$.

force de réaction normale exercée par le boulet $-\mathbf{N}'$, qui est l'inverse de la force de réaction normale exercée par le chariot sur le boulet \mathbf{N}' en vertu de la troisième loi de Newton (8.1). La loi vectorielle du mouvement (2.17) s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P}_M + \mathbf{N} - \mathbf{N}' = m \mathbf{a}_M \quad (\text{chariot}) \quad (8.14)$$

Les équations vectorielles du mouvement sont linéairement dépendantes : l'équation du mouvement du système formé du chariot et du boulet (8.9) est la somme vectorielle des équations du mouvement du boulet (8.13) du chariot (8.14). Pour le mettre en évidence, on écrit le poids \mathbf{P} du système formé du chariot et du boulet comme la somme des poids du chariot \mathbf{P}_M et du boulet \mathbf{P}_m ,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_M + \mathbf{P}_m \quad (\text{chariot et boulet}) \quad (8.15)$$

En sommant les équation du mouvement (8.13) du chariot (8.14) les forces des réactions normales \mathbf{N}' et $-\mathbf{N}'$ entre le chariot et le boulet sont des forces intérieures qui se compensent en vertu de la troisième loi de Newton (8.1). On en conclut que la dérivée temporelle de la quantité de mouvement totale $\dot{\mathbf{p}}$ est la somme des produits des masses et accélérations du chariot et du boulet,

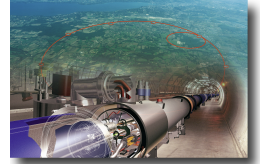
$$\dot{\mathbf{p}} = M \mathbf{a}_M + m \mathbf{a}_m \quad (\text{chariot et boulet}) \quad (8.16)$$

8.2 Collisions

8.2.1 Types de collision

Les **collisions** entre des points matériels sont caractérisées par un **choc** qui conserve la quantité de mouvement totale du système. En général, dans le modèle le plus simple, on peut considérer que les points sont en mouvement rectiligne uniforme et que durant un temps très court, lorsque le choc a lieu, il y a une discontinuité de la quantité de mouvement. Il y a deux types de collisions qu'il s'agit de distinguer, des **collisions élastiques** d'une part et des **collisions inélastiques** d'autre part. Les collisions élastiques conservent l'énergie cinétique du système et les collisions inélastiques ne la conservent pas. Il existe toutes sortes de collisions comme celle de deux boules de billard ou celle de particules fondamentales dans le détecteur de l'expérience CMS de l'accélérateur de particules LHC, c'est-à-dire *Large Hadron Collider*, au CERN.

La durée d'un choc est très courte. On peut la mesurer par exemple en frappant avec un marteau sur une enclume en acier ou sur un bloc de plomb. Le circuit électrique est fermé lorsque le marteau est en contact avec l'enclume ou le bloc. Le résultat est visualisé sur un oscilloscope. Comme l'enclume est plus dure que le bloc, le choc est plus court avec l'enclume qu'avec le bloc parce qu'un matériau plus dur se déforme moins et donne donc lieu à un choc plus élastique qu'un matériau plus mou (Fig. 8.6). La durée du choc entre le marteau et l'enclume ou entre le marteau et le bloc de plomb, qui est de l'ordre de grandeur de $0.1 - 10$ ms est suffisamment courte pour qu'on puisse raisonnablement considérer que la variation de quantité de mouvement a lieu durant un intervalle de temps infinitésimal dt .



Expérience CMS - CERN

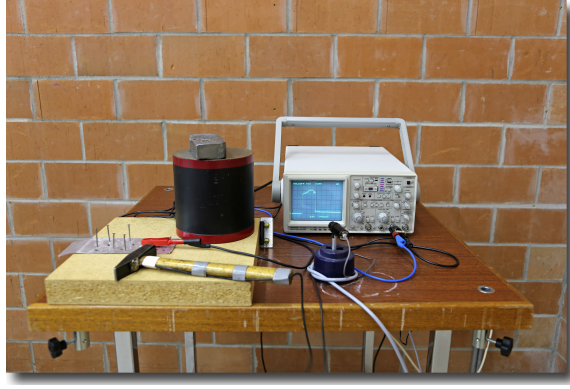


FIGURE 8.6 Mesure de durée d'un choc entre un marteau et une enclume ou un marteau et un bloc de plomb.

A titre d'exemple, on peut mentionner l'impulsion transmise à une cible par une balle de fusil ou l'effet de recul d'un glisseur sur un rail à air lors du tir d'un projectile (Fig. 8.7).

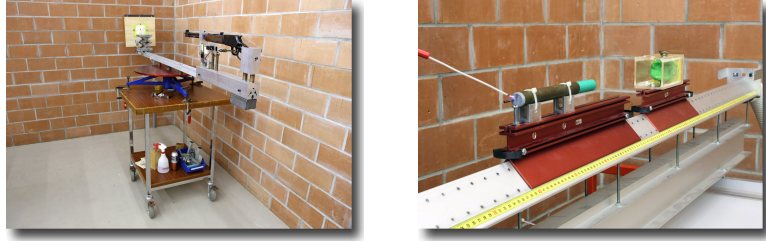


FIGURE 8.7 Lors du choc de la balle de fusil contre la cible en bois, une partie de la quantité de mouvement est transmise au bois, ce qui fait osciller la cible, contrairement au verre qui se brise. Lors de l'explosion du combustible (H_2) le glisseur subit un effet de recul pour que la quantité de mouvement totale soit conservée.

8.2.2 Choc élastique

On considère un choc élastique ou une collision élastique entre deux points matériels de masse m_1 et m_2 respectivement. Dans un système isolé, un choc élastique entre deux points matériels est caractérisé par la conservation de la quantité de mouvement totale,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{cste} \quad (8.17)$$

et par la conservation de l'énergie cinétique totale,

$$T = T_1 + T_2 = \text{cste} \quad (8.18)$$

Dans le référentiel au repos du deuxième point matériel, le premier point matériel se déplace initialement selon un axe horizontal Ox et le second point matériel est initialement au repos (Fig. 8.8),

$$\mathbf{p}_{1i} = p_{1i} \hat{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{0} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad T_{2i} = 0 \quad (8.19)$$

Compte tenu de la condition initiale, les bilans de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique juste avant et juste après le choc s'écrivent,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{1i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f} \quad (8.20)$$

$$T = T_{1i} = T_{1f} + T_{2f} \quad (8.21)$$

En projetant l'équation vectorielle du bilan de quantité de mouvement (8.20) selon les lignes de coordonnées cartésiennes de vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$ respectivement, on obtient les deux équations scalaires suivantes,

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{\mathbf{x}} : \quad p_{1i} &= p_{1f} \cos \theta_1 + p_{2f} \cos \theta_2 \\ \text{selon } \hat{\mathbf{y}} : \quad 0 &= p_{1f} \sin \theta_1 - p_{2f} \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (8.22)$$

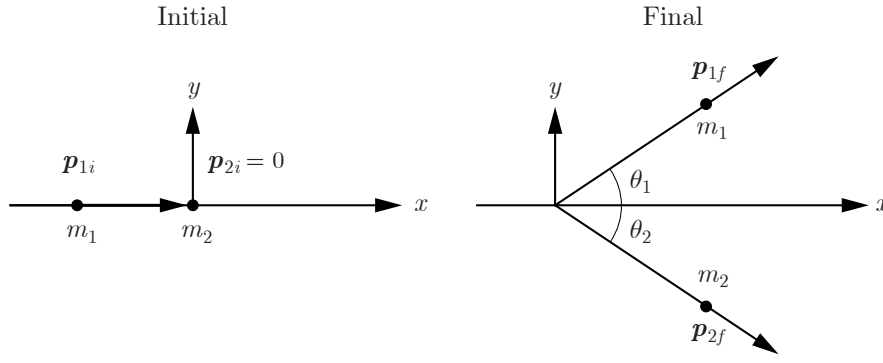


FIGURE 8.8 Choc élastique d'un point matériel de quantité de mouvement initiale \mathbf{p}_{1i} contre un point matériel initialement au repos, c'est-à-dire $\mathbf{p}_{2i} = \mathbf{0}$. Les quantités de mouvement finales \mathbf{p}_{1f} et \mathbf{p}_{2f} sont dans le plan Oxy .

En élevant au carré les équations (8.22), on obtient,

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{\mathbf{x}} : & (p_{1i} - p_{1f} \cos \theta_1)^2 = p_{2f}^2 \cos^2 \theta_2 \\ \text{selon } \hat{\mathbf{y}} : & p_{1f}^2 \sin^2 \theta_1 = p_{2f}^2 \sin^2 \theta_2 \end{aligned} \quad (8.23)$$

La somme des équations (8.23) s'écrit,

$$(p_{1i} - p_{1f} \cos \theta_1)^2 + p_{1f}^2 \sin^2 \theta_1 = p_{2f}^2 \quad (8.24)$$

L'énergie cinétique (6.57) s'écrit en termes de la quantité de mouvement (2.29) comme,

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad (8.25)$$

Ainsi, l'équation de bilan de l'énergie cinétique (8.21) peut être exprimée comme,

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2} \quad (8.26)$$

ce qui implique que,

$$p_{2f}^2 = \frac{m_2}{m_1} (p_{1i}^2 - p_{1f}^2) \quad (8.27)$$

L'identification des équations (8.24) et (8.27) donne,

$$\frac{m_2}{m_1} (p_{1i}^2 - p_{1f}^2) = (p_{1i} - p_{1f} \cos \theta_1)^2 + p_{1f}^2 \sin^2 \theta_1 \quad (8.28)$$

qui est remis en forme comme,

$$\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) p_{1f}^2 - 2 p_{1i} p_{1f} \cos \theta_1 + \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) p_{1i}^2 = 0 \quad (8.29)$$

En divisant l'équation (8.29) par $(1 + m_2/m_1) p_{1i}^2$, on obtient une équation quadratique en p_{1f}/p_{1i} ,

$$\left(\frac{p_{1f}}{p_{1i}}\right)^2 - \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \cos \theta_1 \left(\frac{p_{1f}}{p_{1i}}\right) + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0 \quad (8.30)$$

Les solutions de l'équation quadratique (8.30) sont,

$$\frac{p_{1f}}{p_{1i}} = \frac{m_1 v_{1f}}{m_1 v_{1i}} = \frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(\cos \theta_1 \pm \sqrt{\cos^2 \theta_1 - \left(1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}\right)} \right) \quad (8.31)$$

Masses égales

On considère le cas particulier où les masses sont égales, c'est-à-dire $m_1 = m_2$. Dans ce cas, le principe de conservation de la quantité de mouvement (8.20) et le principe de conservation de l'énergie cinétique (8.21) se réduisent à,

$$\mathbf{v}_{1i} = \mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f} \quad (8.32)$$

$$\mathbf{v}_{1i}^2 = \mathbf{v}_{1f}^2 + \mathbf{v}_{2f}^2 \quad (8.33)$$

En élevant au carré l'équation (8.32), on obtient,

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + 2 \mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f} + v_{2f}^2 \quad (8.34)$$

La différence entre les équations (8.34) et (8.33) se réduit à la condition,

$$\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f} = 0 \quad \text{ainsi} \quad \begin{cases} \text{si } \mathbf{v}_{1f} \neq \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{v}_{2f} \neq \mathbf{0} \text{ alors } \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \\ \text{si } \mathbf{v}_{1f} = \mathbf{0} \text{ alors } \mathbf{v}_{2f} = \mathbf{v}_{1i} \end{cases} \quad (8.35)$$

A titre d'exemple, on peut mentionner la collision entre deux pucks de masse égale sur une table à air horizontale (Fig. 8.9). En réalité, dans cet exemple l'angle entre les pucks est légèrement inférieur à 90° dû à la rotation propre des pucks.

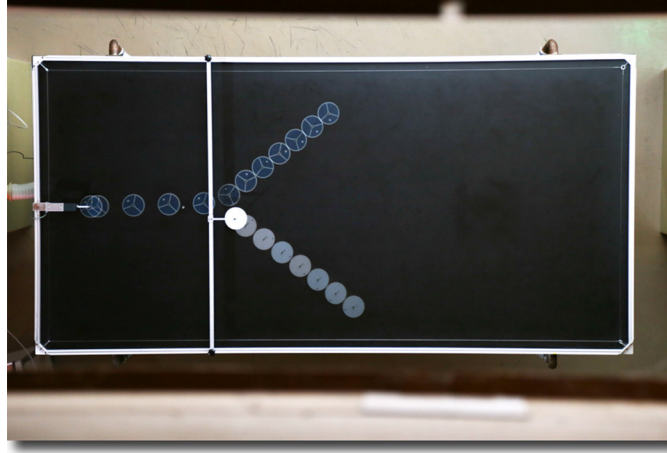


FIGURE 8.9 Le puck bleu lancé depuis la gauche heurte le puck blanc initialement au repos. Après le choc, l'angle entre les trajectoires des deux pucks est légèrement inférieur à 90° .

Choc rectiligne

On considère un choc élastique qui a lieu en ligne droite, c'est-à-dire $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Pour un tel choc, $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = 1$, et l'équation (8.31) se réduit à,

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(1 \pm \sqrt{\chi - \left(\chi - \frac{m_2^2}{m_1^2} \right)} \right) = \frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2} \quad (8.36)$$

La solution mathématique (8.36) avec le signe $+$ est à rejeter car si la vitesse finale v_{1f} du point matériel 1 était égale à sa vitesse initiale v_{1i} , cela signifierait que le choc est virtuel ! Par conséquent, la solution physique s'écrit,

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (8.37)$$

L'expression (8.27) de la conservation de l'énergie cinétique peut être écrite comme,

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (8.38)$$

ce qui donne le carré de la vitesse finale du deuxième point matériel,

$$v_{2f}^2 = \frac{m_1}{m_2} (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) \quad (8.39)$$

En substituant l'équation (8.37) dans l'équation (8.39), on obtient,

$$v_{2f}^2 = \frac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_{1i}^2 \quad (8.40)$$

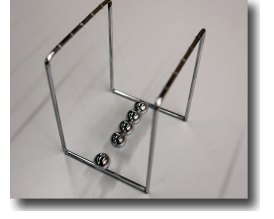
Ainsi, on prenant la racine carrée de la relation (8.40), on obtient,

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (8.41)$$

A l'aide des expressions (8.37) et (8.41), on examine maintenant deux cas particuliers de chocs rectilignes :

- 1) masses égales : $m_1 = m_2$ ainsi $v_{1f} = 0$ et $v_{2f} = v_{1i}$
- 2) masse infinie : $m_1/m_2 \rightarrow 0$ ainsi $v_{1f} = -v_{1i}$ et $v_{2f} = 0$

Le premier cas correspond au choc rectiligne entre deux boules de billard ou entre deux boules métalliques de même masse, et aussi au choc élastique rectiligne entre deux pucks de même masse sur une table à air horizontale ou entre deux glisseurs de même masse sur un rail à air horizontal (Fig. 8.10). Le deuxième cas correspond au choc élastique d'une balle en chute libre contre le sol ou d'une molécule contre la paroi d'un récipient.



Choc élastique rectiligne

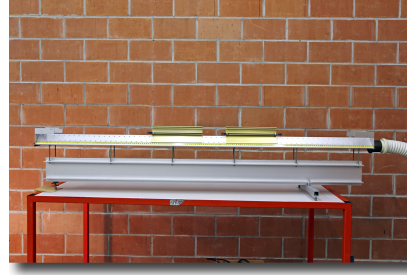
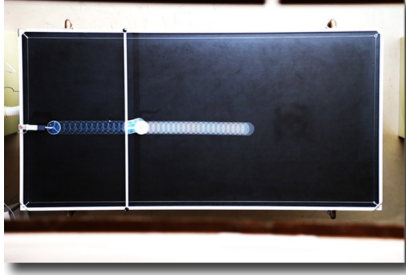


FIGURE 8.10 Choc élastique rectiligne entre deux pucks sur une table à air horizontale. Choc élastique entre deux glisseurs sur un rail à air horizontal.

8.2.3 Choc mou

Un choc parfaitement inélastique, aussi appelé **choc mou**, entre deux points matériels est un choc après lequel les deux points matériels restent attachés l'un à l'autre. Un tel choc provoque une perte d'énergie cinétique. On considère un choc mou entre deux points matériels de masse m_1 et m_2 respectivement. Le premier point matériel se déplace initialement selon un axe horizontal Ox et le second point matériel est initialement au repos donc sa quantité de mouvement initiale est nulle, c'est-à-dire $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$, et son énergie cinétique est nulle également, c'est-à-dire $T_2 = 0$, dans le référentiel d'inertie choisi. Après le choc, la quantité de mouvement totale du système est \mathbf{p}_f et l'énergie cinétique totale est T_f (Fig. 8.11). Le

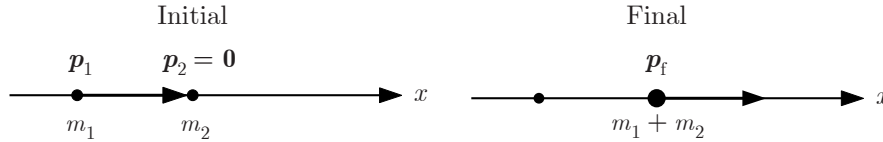


FIGURE 8.11 Choc mou d'un point matériel de quantité de mouvement initiale \mathbf{p}_1 contre un point matériel initialement au repos, c'est-à-dire $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$. La quantité de mouvement finale est \mathbf{p}_f .

principe de conservation de la quantité de mouvement durant le choc s'écrit,

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_f \quad \text{où} \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_f \quad (8.42)$$

Le principe de conservation de la quantité de mouvement (8.42) peut être mis sous la forme,

$$m_1 \mathbf{v}_1 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_f \quad (8.43)$$

On en déduit la vitesse finale du système

$$\mathbf{v}_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 \quad (8.44)$$

L'énergie cinétique initiale T_i du point matériel 1 est,

$$T_i = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 \quad (8.45)$$

et l'énergie cinétique finale T_f du système est,

$$T_f = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \mathbf{v}_f^2 \quad (8.46)$$

Compte tenu des énergies cinétiques initiale (8.45) et finale (8.46), on en conclut que la variation d'énergie cinétique est négative,

$$\Delta T_{i \rightarrow f} = T_f - T_i = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 < 0 \quad (8.47)$$

Ainsi, le choc mou est un processus dissipatif qui provoque une perte d'énergie cinétique. Cette énergie est utilisée principalement pour déformer l'objet, comme une boule en pâte à modeler par exemple. Comme exemple de choc mou, on peut mentionner le choc entre deux glisseurs qui restent accrochés parce la pointe de l'un vient s'enfoncer dans de la pâte à modeler fixée sur l'autre (Fig. 2.8).



Coefficients de restitution $0 < e < 1$

8.2.4 Coefficient de restitution

Les chocs élastiques et les chocs mous sont des cas particuliers de tout un ensemble de chocs possibles. L'élasticité d'un choc contre un objet de masse *infinie* peut être quantifiée par le **coefficient de restitution** défini comme le rapport de la norme de la vitesse finale et de la norme de la vitesse initiale d'un corps,

$$e = \frac{\|v_f\|}{\|v_i\|} \quad (8.48)$$

Il existe trois types de collisions ou de chocs :

- 1) élastique : $e = 1$
- 2) inélastique : $0 < e < 1$
- 3) mou : $e = 0$

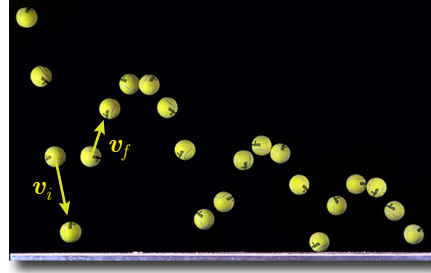


FIGURE 8.12 Chocs inélastiques d'une balle de tennis ($e \approx 0.90$) et d'un ballon de basket contre le sol ($e \approx 0.85$).

A titre d'exemple, on peut mentionner les chocs inélastiques d'une balle de tennis ou d'un ballon de basket contre le sol (Fig. 8.12). Plus le matériau est dur, moins il se déformera durant le choc et donc plus le coefficient de restitution sera grand.

8.3 Problème à deux corps

Les systèmes à deux corps sont très courant en mécanique. On peut mentionner le mouvement de la lune autour de la terre, celui de la terre autour du soleil, le mouvement d'étoiles binaires ou même le mouvement d'un électron et d'un proton dans un atome d'hydrogène. La dynamique d'un système constitué de deux corps, que l'on peut assimiler à des points matériels, en absence de force extérieure présente des propriétés de symétrie qu'on cherche à découvrir. On commence par décrire la dynamique de chaque point matériel par rapport à un référentiel d'inertie quelconque.



Système terre-lune

8.3.1 Loi du mouvement réduit

On considère un système isolé formé de deux corps considérés comme des points matériels. Soit \mathbf{r}_1 le vecteur position du point matériel de masse m_1 et \mathbf{r}_2 le vecteur position du point matériel de masse m_2 (Fig. 8.13).

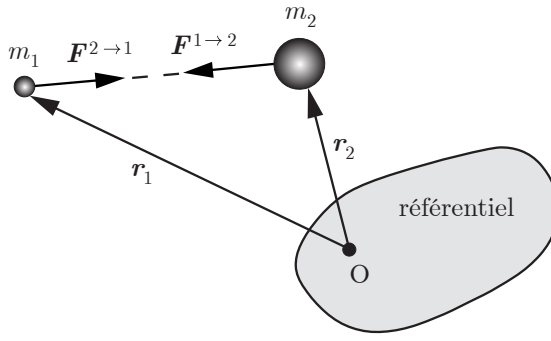


FIGURE 8.13 Problème à deux corps de masse m_1 et m_2 considérés comme des points matériels.

Les lois du mouvement (2.32) appliquées aux sous-systèmes des deux points matériels sont les suivantes :

$$\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 \quad (8.49)$$

où les forces d'interaction $\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1}$ et $\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2}$ sont des forces intérieures au système constitué des deux points matériels mais elles sont considérées comme des forces extérieures à chaque sous-système constitué d'un seul point matériel. Ces deux forces d'interaction sont de nature quelconque et elles satisfont la loi d'action-réaction (8.1). Pour repérer la position des deux points matériels, il faut deux vecteurs : \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 . Comme les lois du mouvement (8.49) sont indépendantes du choix de l'origine O du système d'axes, on peut faire un changement de variables qui définit de nouveaux vecteurs positions qui rendent mieux compte des symétries du mouvement. On définit le vecteur position du **centre de masse** \mathbf{R}_G du système des deux points matériel comme,

$$\mathbf{R}_G = \frac{m_1}{M} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}_2 \quad (8.50)$$

et le vecteur **position relative** \mathbf{r} du point matériel 1 par rapport au point matériel 2 de la manière suivante,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad \text{où} \quad M = m_1 + m_2 \quad (8.51)$$

Le centre de masse est le centre de gravité du système qui sera défini explicitement pour un système de points matériels lorsqu'on abordera l'étude de la dynamique du solide indéformable. En dérivant deux fois par rapport au temps les équations (8.50) et (10.21), on obtient les équations suivantes,

$$M \ddot{\mathbf{R}}_G = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 \quad (8.52)$$

En prenant la somme des lois du mouvement (8.49), compte tenu des identités (8.52), on obtient,

$$\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} + \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = M \ddot{\mathbf{R}}_G \quad (8.53)$$

D'après la 3^e loi de Newton (8.1), on en conclut alors,

$$\ddot{\mathbf{R}}_G = \mathbf{0} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{V}_G = \dot{\mathbf{R}}_G = \text{cste} \quad (8.54)$$

ce qui signifie que le centre de masse du système est en mouvement rectiligne uniforme ou au repos en absence de force extérieure au système. La masse réduite μ du système est définie comme,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \text{ainsi} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (8.55)$$

En prenant la différence de la première loi du mouvement (8.49) multipliée par m_2 et de la deuxième multipliée par m_1 compte tenu de la masse réduite (8.55), on obtient,

$$m_2 \mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} - m_1 \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} = m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2) = M \mu \ddot{\mathbf{r}} \quad (8.56)$$

Compte tenu de la 3^e loi de Newton (8.1),

$$m_2 \mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} - m_1 \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} = (m_2 + m_1) \mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} = M \mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} \quad (8.57)$$

En identifiant les membres de droites des relations (8.56) et (8.57) divisés par la masse totale du système M , on obtient la loi du mouvement réduit,

$$\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} = \mu \ddot{\mathbf{r}} \quad (8.58)$$

Ainsi, le mouvement du problème à deux corps isolés se réduit au mouvement rectiligne uniforme du centre de masse et au mouvement réduit d'un objet de masse réduite μ autour du point matériel 2 pris comme référence. De manière alternative, on définissant le vecteur position relative comme $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, on aurait tout aussi bien pu prendre le point matériel 1 comme référence.

8.3.2 Quantité de mouvement et énergie cinétique

La quantité de mouvement totale \mathbf{p} et l'énergie cinétique totale T du système de deux points matériels s'écrivent,

$$\mathbf{p} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \quad (8.59)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 \quad (8.60)$$

En inversant les vecteurs position (8.50) et (10.21), compte tenu de la définition de la masse réduite (8.55), on obtient,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_G + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_G - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r} \quad (8.61)$$

Les dérivées temporelles des positions (8.61) donnent les vitesses,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V}_G + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{V}_G - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{v} \quad (8.62)$$

En substituant les vitesses (8.62) dans l'expression (8.59) de la quantité de mouvement totale, celle-ci devient,

$$\mathbf{p} = (m_1 + m_2) \mathbf{V}_G = M \mathbf{V}_G \quad (8.63)$$

En substituant les équations (8.62) dans l'expression (8.60) de l'énergie cinétique, celle-ci devient,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \left(\mathbf{V}_G + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{v} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\mathbf{V}_G - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{v} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \mathbf{V}_G^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mu^2 \mathbf{v}^2 \end{aligned} \quad (8.64)$$

Compte tenu de la définition de la masse réduite (8.55), l'expression de l'énergie cinétique (8.64) se réduit à,

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_G^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 \quad (8.65)$$

où le premier terme est l'énergie cinétique constante associée au mouvement du centre de masse et le deuxième terme est l'énergie cinétique associée au mouvement réduit.

8.3.3 Référentiel du centre de masse

Comme le mouvement du centre de masse est un mouvement rectiligne uniforme, on peut faire une transformation de coordonnées et définir les vecteurs positions \mathbf{r}'_1 et \mathbf{r}'_2 relatifs au référentiel du centre de masse qui, compte tenu des relations (8.61), s'écrivent,

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_G = \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_G = -\frac{\mu}{m_2} \mathbf{r} \quad (8.66)$$

La dérivée temporelle des relations (8.66) est donnée par,

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{\mu}{m_1} \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}'_2 = -\frac{\mu}{m_2} \mathbf{v} \quad (8.67)$$

Compte tenu des expressions (8.66) des vitesses relatives au référentiel du centre de masse, la quantité de mouvement totale \mathbf{p}' relative au référentiel du centre de masse est nulle,

$$\mathbf{p}' = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = \mathbf{0} \quad (8.68)$$

Compte tenu des expressions (8.66) des vitesses relatives au référentiel du centre de masse et de l'expression (8.55) de la masse réduite, l'énergie cinétique totale T' relative au référentiel du centre de masse s'écrit,

$$T' = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}'_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}'_2{}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mu^2 \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 \quad (8.69)$$

L'énergie cinétique T contient un terme de plus que l'énergie cinétique T' . Ce terme correspond à l'énergie cinétique associée au mouvement du centre de masse du système.